M-ESC-D-MTH

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : तीन घंटे *Time Allowed :* ***Three*** *Hours*	*अधिकतम अंक :* **250** *Maximum Marks :* **250**

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें ***आठ*** *प्रश्न हैं जो* ***दो खण्डों*** *में विभाजित हैं तथा* ***हिन्दी*** *और* ***अंग्रेज़ी*** *दोनों में छपे हैं ।*

परीक्षार्थी को कुल ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।*

प्रश्न संख्या ***1*** *और* ***5*** *अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम* ***एक*** *प्रश्न चुनकर किन्हीं* ***तीन*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।*

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

There are ***EIGHT*** *questions divided in* ***TWO SECTIONS*** *and printed both in* ***HINDI*** *and in* ***ENGLISH****.*

Candidate has to attempt ***FIVE*** *questions in all.*

Questions no. ***1*** *and* ***5*** *are compulsory and out of the remaining,* ***THREE*** *are to be attempted choosing at least* ***ONE*** *from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :**

Answer all the questions : *10×5=50*

(a) मान लीजिए $\mathbb{K}$ एक क्षेत्र है तथा $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$ पर एक एकल चर X में बहुपदों का वलय है । एक बहुपद $f \in \mathbb{K}[X]$ के लिए मान लीजिए (f), f द्वारा जनित $\mathbb{K}[X]$ में गुणजावली को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि (f), $\mathbb{K}[X]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि f, $\mathbb{K}$ पर अखंडनीय बहुपद है ।

Let $\mathbb{K}$ be a field and $\mathbb{K}[X]$ be the ring of polynomials over $\mathbb{K}$ in a single variable X. For a polynomial $f \in \mathbb{K}[X]$, let (f) denote the ideal in $\mathbb{K}[X]$ generated by f. Show that (f) is a maximal ideal in $\mathbb{K}[X]$ if and only if f is an irreducible polynomial over $\mathbb{K}$. *10*

(b) $$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \; 0 < x < \infty$$

द्वारा दिए गए फलन $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ के लिए दर्शाइए कि एक अवकलनीय फलन $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ है जो f का विस्तार करता है ।

For the function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ given by

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \; 0 < x < \infty,$$

show that there is a differentiable function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that extends f. *10*

(c) दो अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ निम्न द्वारा आगमनत: परिभाषित होते हैं :

$$x_1 = \frac{1}{2}, \; y_1 = 1 \text{ तथा } x_n = \sqrt{x_{n-1}\, y_{n-1}}, \; n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

सिद्ध कीजिए कि

$$x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

तथा निगमन कीजिए कि दोनों अनुक्रम एक ही सीमान्त (limit) l पर अभिसरित होते हैं, जहाँ $\frac{1}{2} < l < 1$ है ।

Two sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are defined inductively by the following :

$$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 1 \text{ and } x_n = \sqrt{x_{n-1}\, y_{n-1}},\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Prove that

$$x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

and deduce that both the sequences converge to the same limit l, where $\frac{1}{2} < l < 1$. 10

(d) क्या $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ एक प्रसंवादी फलन है ? अपने दावे को सिद्ध कीजिए । यदि हाँ, तो इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $u(x, y)$ ज्ञात कीजिए तथा इससे विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग क्रमशः u तथा v हैं ।

Is $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ a harmonic function ? Prove your claim. If yes, find its conjugate harmonic function $u(x, y)$ and hence obtain the analytic function whose real and imaginary parts are u and v respectively. 10

(e) व्यवरोधों

$$x + 2y \geq 1,\ 2x + y \leq 1,\ x \geq 0 \text{ तथा } y \geq 0$$

के साथ $5x + 2y$ का अधिकतम मान आलेखीय विधि द्वारा ज्ञात कीजिए ।

Find the maximum value of

$$5x + 2y$$

with constraints

$$x + 2y \geq 1,\ 2x + y \leq 1,\ x \geq 0 \text{ and } y \geq 0$$

by graphical method. 10

Q2. (a) दर्शाइए कि श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

सापेक्ष अभिसारी है । (यदि इसे दर्शाने के लिए आप किसी प्रमेय/प्रमेयों का इस्तेमाल करते हैं, तो उसकी/उनकी उपपत्ति भी दीजिए ।)

Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

is conditionally convergent. (If you use any theorem(s) to show it, then you must give a proof of that theorem(s).) *15*

(b) मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है तथा $\mathbb{Z}_p$ पूर्णांक मॉड्यूलो p के योज्य समूह को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_p$ का प्रत्येक शून्येतर अवयव $\mathbb{Z}_p$ का जनन करता है ।

Let p be a prime number and $\mathbb{Z}_p$ denote the additive group of integers modulo p. Show that every non-zero element of $\mathbb{Z}_p$ generates $\mathbb{Z}_p$. *15*

(c) अधिकतमीकरण कीजिए

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

क्या इष्टतम हल अद्वितीय है ? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए ।

Maximize

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

subject to

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Is the optimal solution unique ? Justify your answer. *20*

Q3. (a) मान लीजिए K, क्षेत्र F का एक विस्तार है । सिद्ध कीजिए कि K के अवयव, जो कि F पर बीजीय हैं, K का उपक्षेत्र बनाते हैं । आगे, यदि $F \subset K \subset L$ क्षेत्र हैं, L, K पर बीजीय है तथा K, F पर बीजीय है, तब सिद्ध कीजिए कि L, F पर बीजीय है ।

Let K be an extension of a field F. Prove that the elements of K, which are algebraic over F, form a subfield of K. Further, if $F \subset K \subset L$ are fields, L is algebraic over K and K is algebraic over F, then prove that L is algebraic over F. *20*

(b) फलन

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

के आपेक्षिक उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए ।

Find the relative maximum and minimum values of the function

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$ 15

(c) मान लीजिए

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ वक्र

$\gamma(t) = e^{2\pi i t},\ 0 \le t \le 1$

है । औचित्य बताते हुए परिरेखीय (कन्टूर) समाकल

$$\int_\gamma \frac{dz}{4z^2 - 1}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

Let

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ be the curve

$\gamma(t) = e^{2\pi i t},\ 0 \le t \le 1.$

Find, giving justifications, the value of the contour integral 15

$$\int_\gamma \frac{dz}{4z^2 - 1}$$

Q4. (a) दर्शाइए कि प्रत्येक बीजत: संवृत क्षेत्र अनंत है ।

Show that every algebraically closed field is infinite. 15

(b) मान लीजिए $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन इस प्रकार है कि $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ तथा $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ का अस्तित्व है तथा ये परिमित हैं । सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}$ पर f एकसमान संतत है ।

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ and $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ exist and are finite. Prove that f is uniformly continuous on $\mathbb{R}$. 15

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक घात क्षेणी इसके अभिसरण वृत्त के अन्दर एक विश्लेषिक फलन को निरूपित करती है ।

Prove that every power series represents an analytic function inside its circle of convergence. 20

खण्ड B

SECTION B

Q5. सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer all the questions : *10×5=50*

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = cz$ द्वारा दिए गए गोलों के कुल के लम्बकोणीय पृष्ठों का व्यापक समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the general equation of surfaces orthogonal to the family of spheres given by $x^2 + y^2 + z^2 = cz$. *10*

(b) क्या वेग $\vec{q} = \left[z - \frac{2x}{r}, 2y - 3z - \frac{2y}{r}, x - 3y - \frac{2z}{r}\right]$ के द्रव की भ्रमिलता होती है, जहाँ $\vec{q}\,(u, v, w)$ कार्तीय फ्रेम में वेग है तथा $\vec{r} = (x, y, z)$ एवं $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ हैं ? वृत्त $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ में परिसंचरण (circulation) क्या है ?

Does a fluid with velocity $\vec{q} = \left[z - \frac{2x}{r}, 2y - 3z - \frac{2y}{r}, x - 3y - \frac{2z}{r}\right]$ possess vorticity, where $\vec{q}\,(u, v, w)$ is the velocity in the Cartesian frame, $\vec{r} = (x, y, z)$ and $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$? What is the circulation in the circle $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$? *10*

(c) m द्रव्यमान का एक मुक्त-कण, जो बिना बलों के दिक्काल (space) में गतिमान है, का विचार कीजिए । यदि कण $t = 0$ पर मूल-बिन्दु से शुरुआत करता है तथा τ समय पर स्थिति (x, y, z) पर पहुँचता है, तो हैमिल्टन के अभिलक्षण फलन S को x, y, z, τ के एक फलन के रूप में ज्ञात कीजिए ।

Consider a single free particle of mass m, moving in space under no forces. If the particle starts from the origin at $t = 0$ and reaches the position (x, y, z) at time τ, find the Hamilton's characteristic function S as a function of x, y, z, τ. *10*

(d) निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को तुल्य द्वि-आधारी तथा षोडश-आधारी संख्याओं में बदलिए :

(i) 4096

(ii) 0·4375

(iii) 2048·0625

Convert the following decimal numbers to equivalent binary and hexadecimal numbers : *10*

(i) 4096

(ii) 0·4375

(iii) 2048·0625

(e) आंशिक अवकल समीकरण

$$(y + zx)\, p - (x + yz)\, q = x^2 - y^2$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए ।

Find the general integral of the partial differential equation

$$(y + zx)\, p - (x + yz)\, q = x^2 - y^2.$$ *10*

Q6. (a) समीकरण $z = p^2 - q^2$ के अभिलक्षण निर्धारित कीजिए, तथा परवलय $4z + x^2 = 0$, $y = 0$ से गुज़रने वाला समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए ।

Determine the characteristics of the equation $z = p^2 - q^2$, and find the integral surface which passes through the parabola $4z + x^2 = 0$, $y = 0$. *15*

(b) वेग $U\vec{i}$ से गतिमान असंपीड्य तरल की एकसमान धारा में मूल-बिन्दु O पर प्रबलता m का एक सरल उद्गम दृढ़ है । दर्शाइए कि धारा के किसी बिन्दु P पर वेग विभव ϕ का मान $\frac{m}{r} - Ur \cos\theta$ है, जहाँ $OP = r$ तथा θ वह कोण है जो $\overrightarrow{OP}$, दिशा $\vec{i}$ के साथ बनाता है । धारारेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि वे पृष्ठों $Ur^2 \sin^2\theta - 2m \cos\theta =$ अचर (constant) पर स्थित हैं ।

A simple source of strength m is fixed at the origin O in a uniform stream of incompressible fluid moving with velocity $U\vec{i}$. Show that the velocity potential ϕ at any point P of the stream is $\frac{m}{r} - Ur \cos\theta$, where $OP = r$ and θ is the angle which $\overrightarrow{OP}$ makes with the direction $\vec{i}$. Find the differential equation of the streamlines and show that they lie on the surfaces $Ur^2 \sin^2\theta - 2m \cos\theta = \text{constant}$. *15*

(c) मान लीजिए $x \in [0, 1]$ के लिए $f(x) = e^{2x} \cos 3x$ है । नोड $x = 0, x = 0{\cdot}3, x = 0{\cdot}6$ तथा $x = 1$ पर घात 3 के लग्रांज अंतर्वेशी बहुपद का इस्तेमाल करते हुए $f(0{\cdot}5)$ के मान का आकलन कीजिए । अन्तराल $[0, 1]$ पर त्रुटि सीमा तथा वास्तविक त्रुटि $E(0{\cdot}5)$ का अभिकलन भी कीजिए ।

Let $f(x) = e^{2x} \cos 3x$, for $x \in [0, 1]$. Estimate the value of $f(0{\cdot}5)$ using Lagrange interpolating polynomial of degree 3 over the nodes $x = 0$, $x = 0{\cdot}3$, $x = 0{\cdot}6$ and $x = 1$. Also, compute the error bound over the interval $[0, 1]$ and the actual error $E(0{\cdot}5)$. *20*

Q7. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$

को हल कीजिए ।

Solve the partial differential equation

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$ *15*

(b) त्रिज्याओं a, b (a < b) के दो संकेन्द्र गोलीय कोशों के बीच की जगह को घनत्व ρ के तरल से भरा गया है । यदि कोशों को गतिमान कर दिया जाए, अन्दर वाले को x-दिशा में वेग U के साथ तथा बाहर वाले को y-दिशा में वेग V के साथ, तो दर्शाइए कि तरल की प्रारम्भिक गति, वेग विभव

$$\phi = \frac{\left\{a^3 U \left(1 + \frac{1}{2} b^3 r^{-3}\right) x - b^3 V \left(1 + \frac{1}{2} a^3 r^{-3}\right) y\right\}}{(b^3 - a^3)}$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तथा निर्देशांक समकोणिक हैं । तरल के किसी भी बिन्दु पर वेग का मान निकालिए ।

The space between two concentric spherical shells of radii a, b (a < b) is filled with a liquid of density ρ. If the shells are set in motion, the inner one with velocity U in the x-direction and the outer one with velocity V in the y-direction, then show that the initial motion of the liquid is given by velocity potential

$$\phi = \frac{\left\{a^3 U \left(1 + \frac{1}{2} b^3 r^{-3}\right) x - b^3 V \left(1 + \frac{1}{2} a^3 r^{-3}\right) y\right\}}{(b^3 - a^3)},$$

where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, the coordinates being rectangular. Evaluate the velocity at any point of the liquid. *20*

(c) समाकल $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ के लिए, दर्शाइए कि द्वि-बिन्दु गाउस क्षेत्रकलन नियम,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

द्वारा दिया गया है । इस नियम का इस्तेमाल करते हुए $\int_{2}^{4} 2x\, e^{x} dx$ का आकलन कीजिए ।

For an integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, show that the two-point Gauss quadrature rule is given by $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Using this rule, estimate $\int_{2}^{4} 2x\, e^{x} dx$. *15*

Q8. (a) लम्बाई 10 cm तथा अचर अनुप्रस्थ-परिच्छेद का क्षेत्रफल 1 cm^2 की चाँदी की एक छड़ में तापमान $u(x, t)$ ज्ञात कीजिए । मान लीजिए घनत्व $\rho = 10{\cdot}6$ g/cm^3, ऊष्मा चालकता $K = 1{\cdot}04$ cal / (cm sec °C) तथा विशिष्ट ऊष्मा $\sigma = 0{\cdot}056$ cal/g °C. छड़ पूर्णत: पार्श्विक वियुक्त (perfectly isolated laterally) है, सिरों को 0°C पर रखा गया है तथा प्रारम्भिक तापमान $f(x) = \sin(0{\cdot}1\, \pi x)$ °C है । ध्यान रखिए कि $u(x, t)$ तापीय समीकरण $u_t = c^2 u_{xx}$ का अनुगमन करता है, जहाँ $c^2 = K / (\rho\,\sigma)$ है ।

Find the temperature $u(x, t)$ in a bar of silver of length 10 cm and constant cross-section of area 1 cm^2. Let density $\rho = 10{\cdot}6$ g/cm^3, thermal conductivity $K = 1{\cdot}04$ cal / (cm sec °C) and specific heat $\sigma = 0{\cdot}056$ cal/g °C. The bar is perfectly isolated laterally, with ends kept at 0°C and initial temperature $f(x) = \sin(0{\cdot}1\, \pi x)$ °C. Note that $u(x, t)$ follows the heat equation $u_t = c^2 u_{xx}$, where $c^2 = K / (\rho\,\sigma)$. *20*

(b) लम्बाई l तथा झुकाव के कोण ϕ के साथ एक झुके हुए समतल पर r त्रिज्या का एक हूप बिना फिसले लुढ़क रहा है । तंत्र को उचित व्यापकीकृत निर्देशांक दीजिए । व्यवरोध, यदि कोई हों, तो ज्ञात कीजिए । तंत्र के लिए लग्रांजी समीकरण लिखिए । तब या अन्यथा झुके हुए समतल के निचले सिरे पर हूप का वेग ज्ञात कीजिए ।

A hoop with radius r is rolling, without slipping, down an inclined plane of length l and with angle of inclination ϕ. Assign appropriate generalized coordinates to the system. Determine the constraints, if any. Write down the Lagrangian equations for the system. Hence or otherwise determine the velocity of the hoop at the bottom of the inclined plane. *15*

(c) मान लीजिए A, B, C बूलीय चर हैं, A का पूरक $\bar{A}$ द्वारा निर्दिष्ट होता है, A OR B के लिए व्यंजक A + B तथा A AND B के लिए व्यंजक A . B है । तो निम्नलिखित व्यंजक को सरल कीजिए तथा AND और OR गेट्स का इस्तेमाल करते हुए सरलीकृत व्यंजक का ब्लॉक आरेख खींचिए ।

$A \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + \bar{C})$.

Let A, B, C be Boolean variables, $\bar{A}$ denote complement of A, A + B is an expression for A OR B and A . B is an expression for A AND B. Then simplify the following expression and draw a block diagram of the simplified expression, using AND and OR gates.

$A \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + \bar{C})$. *15*