CS (Main) Exam, 2013

A-BRL-M-TUBA

सांख्यिकी / STATISTICS

प्रश्न-पत्र I / Paper I

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time allowed : **Three** Hours

अधिकतम अंक : **250**
Maximum Marks : **250**

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों का उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेज़ी दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । उत्तर-पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in two **SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. (a) मक्खियों पर डी.डी.टी. के एक विशिष्ट ब्रांड वाले प्रयोग के दौरान, यह पाया गया कि प्रथम अनुप्रयोग में 80% मर गईं । वे जो जीवित रह गईं, प्रतिरोध विकसित करने लगीं, जिससे बाद के किसी अनुप्रयोग में जीवित मक्खियों में से मारी गई मक्खियों का प्रतिशत, पूर्ववर्ती अनुप्रयोग का आधा है । इस प्रकार प्रथम अनुप्रयोग की 40% जीवित मक्खियाँ दूसरे अनुप्रयोग में मर जाएँगी, प्रथम दो अनुप्रयोगों की 20% जीवित मक्खियाँ तीसरे अनुप्रयोग में मर जाएँगी, इत्यादि ।

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) चार अनुप्रयोगों में एक मक्खी जीवित रह पाएगी ।

(ii) वह चार अनुप्रयोगों के बाद जीवित रहेगी, यदि दिया गया है कि प्रथम अनुप्रयोग के बाद वह जीवित है ।

(b) दो यादृच्छिक चरों X तथा Y के संयुक्त बंटन का प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) है

$$f_{X,Y}(x, y) = \beta^{a+b} x^{a-1} (y - x)^{b-1} e^{-\beta y}, 0 < X < Y < \infty$$
$$= 0 \qquad \text{अन्यथा}$$

X का उपान्त बंटन तथा Y दत्त X का सप्रतिबंध बंटन व्युत्पन्न कीजिए ।

(c) मान लीजिए X_1, X_2 स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, जो प्राचल λ सहित प्वासों बंटन का अनुसरण करते हैं । दर्शाइए कि $X_1 + X_2$, λ के लिए पर्याप्त है । जाँच कीजिए यदि $X_1 + 2X_2$ भी λ के लिए पर्याप्त है ।

(d) मान लीजिए X एक ऋणात्मक द्विपद यादृच्छिक चर है, प्राचलों r तथा θ के साथ, r ज्ञात है तथा θ अज्ञात । मानिए समस्या है $H_1 : \theta > \frac{1}{2}$ के विरुद्ध $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ का परीक्षण करना । समस्या के लिए UMP परीक्षण ज्ञात कीजिए तथा इसका क्षमता फलन प्राप्त कीजिए ।

(e) चिह्न परीक्षण प्रतिदर्शज का प्रयोग करते हुए एक संतत बंटन की समष्टि माध्यिका के लिए अतुच्छ बंटन स्वतंत्र विश्वास्यता अंतराल ज्ञात कीजिए ।

(a) In the course of an experiment with a particular brand of DDT on flies, it is found that 80% are killed in the first application. Those which survive develop a resistance, so that the percentage of survivors killed in any later application is half that in the preceding application. Thus 40% of the survivors of the first application would succumb to the second, 20% of the survivors of the first two applications would succumb to the third, and so on.

Find the probability that

(i) a fly will survive four applications.

(ii) it will survive four applications, given that it has survived the first one.

10

(b) The joint distribution of two random variables X and Y has the pdf

$$f_{X,Y}(x, y) = \beta^{a+b} x^{a-1} (y - x)^{b-1} e^{-\beta y},\ 0 < X < Y < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{otherwise}$$

Derive the marginal distribution of X and the conditional distribution of Y given X.

10

(c) Let X_1, X_2 be independent random variables following Poisson distribution with parameter λ. Show that $X_1 + X_2$ is sufficient for λ. Verify if $X_1 + 2X_2$ is also sufficient for λ.

10

(d) Let X be a negative Binomial random variable with parameters r and θ, r being known and θ unknown. Suppose the problem is to test $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ against $H_1 : \theta > \frac{1}{2}$. Find the UMP test for the problem and obtain its power function.

10

(e) Use sign test statistic to find a non-trivial distribution free confidence interval for population median of a continuous distribution.

10

Q2. (a) यदि $\varphi(t)$, बंटन फलन $F(x)$ वाले एक यादृच्छिक चर के अभिलक्षणिक फलन को द्योतित करता है, तो दर्शाइए कि $e^{[\varphi(t) - 1]}$ एक अभिलक्षणिक फलन है । अतः इसका संगत बंटन फलन ज्ञात कीजिए ।

(b) लाप्लास बंटन

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}} \quad -\infty < x < \infty, \lambda > 0$$
$$-\infty < \mu < \infty$$

के लिए आघूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए ।

(c) मान लीजिए (X, Y) संयुक्तत: बंटित है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन है

$$f_{X, Y}(x, y, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta} + \theta y\right)\right]; X > 0, Y > 0$$
$$= 0 \qquad \text{अन्यथा}$$

n युग्मों के प्रतिदर्श में फिशर सूचना ज्ञात कीजिए ।

(a) If $\varphi(t)$ denotes the characteristic function (ch.f.) of a random variable with distribution function $F(x)$, show that $e^{[\varphi(t) - 1]}$ is a characteristic function. Hence find its corresponding distribution function. *20*

(b) For the Laplace distribution

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{\frac{-|x-\mu|}{\lambda}} \quad -\infty < x < \infty, \lambda > 0$$
$$-\infty < \mu < \infty$$

find the moment generating function. *15*

(c) Let (X, Y) be jointly distributed with probability density function

$$f_{X, Y}(x, y, \theta) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta} + \theta y\right)\right]; X > 0, Y > 0$$
$$= 0 \qquad \text{otherwise}$$

Find Fisher information in a sample of n pairs. *15*

Q3. (a) राव – ब्लैकवेल प्रमेय का प्रयोग करते हुए, एक पूर्ण पर्याप्त प्रतिदर्शज पर आधारित आकलनीय प्राचलिक फलन का एकसमान न्यूनतम प्रसरण अनभिनत आकलक (UMVUE) व्युत्पन्न कीजिए ।

$P[X = r]$, $r = 0, 1, \ldots m$ का UMVUE प्राप्त कीजिए जहाँ $X_1, X_2, \ldots X_n$ स्वतंत्रत: सर्वसम बंटित (i.i.d.) Bin(m, p) हैं ।

(b) एक प्राचल चरघातांकी परिवार के लिए $H_1 : \theta \neq \theta_0$ के विरुद्ध $H_0 : \theta = 0$ का परीक्षण करने के लिए UMPU परीक्षण प्राप्त कीजिए । इसके अतिरिक्त सिद्ध कीजिए कि $E[\varphi(X)\, T(X)] = \alpha\, E[T(X)]$.

(c) मान लीजिए X बंटित है Bin(n, p) की तरह तथा $\pi(p) = 1$ $(0 < p < 1)$, p का पूर्व प्रायिकता घनत्व है । तो बेज़ आकलक (वर्गित त्रुटि हानि के अंतर्गत) तथा बेज़ जोख़िम प्राप्त कीजिए ।

(a) Using Rao – Blackwell Theorem, derive the uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE) of an estimable parametric function based on a complete sufficient statistic.

Obtain the UMVUE of $P[X = r]$, $r = 0, 1, \ldots m$ where $X_1, X_2, \ldots X_n$ are independently identically distributed (i.i.d.) Bin(m, p). *20*

(b) For one parameter exponential family obtain UMPU test for testing $H_0 : \theta = 0$ against $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Further prove that

$E[\varphi(X)\, T(X)] = \alpha\, E[T(X)]$. *15*

(c) Let X be distributed as Bin(n, p) and $\pi(p) = 1$ $(0 < p < 1)$ be the prior probability density of p. Then obtain the Bayes estimator (under squared error loss) and the Bayes risk. *15*

Q4. (a) मान लीजिए $H_1 : X \sim f(x, \theta_1)$, $\theta_1 \neq \theta_0$ के विरुद्ध $H_0 : X \sim f(x, \theta_0)$ का परीक्षण करने के लिए अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) द्वारा आवश्यक प्रेक्षणों की संख्या N है । उपयुक्त अभिधारणाएँ बताते हुए, दर्शाइए कि $P(N < \infty) = 1$, $\theta = \theta_0, \theta_1$ पर ।

जब $X \sim N(\theta, 1)$, तो $H_1 : \theta = 1$ के विरुद्ध $H_0 : \theta = 0$ का परीक्षण करने के लिए, नियत प्रतिदर्श आमाप आधारित MP परीक्षण पर SPRT पर आधारित H_0 के अंतर्गत प्रतिदर्श आमापों में प्रतिशत बचत के व्यंजक को व्युत्पन्न कीजिए । प्रत्येक क्रियाविधि की क्षमता (α, β) लीजिए ।

(b) बृहत् संख्याओं का सबल नियम बताइए । निर्णय कीजिए कि क्या बृहत् संख्याओं का सबल नियम परस्पर स्वतंत्र यादृच्छिक चरों X_k के अनुक्रम, जिसका बंटन

$$P\left\{X_k = \pm 2^k\right\} = 2^{-(2k+1)}$$

$$P\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$$

है, के लिए लागू होता है ।

(c) टायरों के दो ब्रांडों की तुलना करने के लिए, प्रत्येक प्रकार के 8 टायरों के लिए निम्नलिखित मील-दूरियाँ ('000' मील में) प्राप्त की गईं :

ब्रांड A : 32·1, 20·6, 17·8, 28·4, 19·6, 21·4, 19·9, 30·1

ब्रांड B : 19·8, 27·6, 30·8, 27·8, 34·1, 18·7, 16·9, 17·9

मान – ह्विटनी परीक्षण का प्रयोग करते हुए एक ही समष्टि से दो प्रतिदर्श आते हैं, इसकी $\alpha = 0{\cdot}05$ पर निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण कीजिए ।

[सारणी मान : $U(8, 8, 0{\cdot}025) = 50$, $U(8, 8, 0{\cdot}05) = 48$]

जहाँ $P[U > U(m, n, \alpha)] \leq \alpha$.

(a) Let N be the number of observations required by the sequential probability ratio test (SPRT) for testing $H_0 : X \sim f(x, \theta_0)$ against $H_1 : X \sim f(x, \theta_1)$, $\theta_1 \neq \theta_0$. Stating appropriate assumptions, show that $P(N < \infty) = 1$ at $\theta = \theta_0, \theta_1$.

When $X \sim N(\theta, 1)$, for testing $H_0 : \theta = 0$ against $H_1 : \theta = 1$, derive the expression of the percentage saving in sample sizes under H_0 based on SPRT over the fixed sample size based MP test. Take the strength of each procedure as (α, β). *20*

(b) State the strong law of large numbers. Decide whether the strong law of large numbers holds for the sequence of mutually independent random variables X_k with distribution

$$P\{X_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}$$

$$P\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$$

15

(c) To compare two brands of tyres, the following milages (in '000' miles) were obtained for 8 tyres of each kind :

Brand A : 32·1, 20·6, 17·8, 28·4, 19·6, 21·4, 19·9, 30·1

Brand B : 19·8, 27·6, 30·8, 27·8, 34·1, 18·7, 16·9, 17·9

Test the null hypothesis at $\alpha = 0{\cdot}05$ that the two samples come from the same population using Mann – Whitney test.

[Table value : $U(8, 8, 0{\cdot}025) = 50$, $U(8, 8, 0{\cdot}05) = 48$]

where $P[U > U(m, n, \alpha)] \leq \alpha$. *15*

खण्ड B

SECTION B

Q5. (a) निम्नलिखित रैखिक निदर्श पर विचार कीजिए :

$$y_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \theta_1 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_4 + \varepsilon_2$$

$$y_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \varepsilon_3$$

$$y_4 = \theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3 + \varepsilon_4$$

जहाँ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ तथा θ_4 प्राचल हैं, $\varepsilon_j \sim (0, \sigma^2)$, $j = 1 \ldots 4$. ε_j's सभी स्वतंत्रतः बंटित हैं । प्रसामान्य समीकरण व्युत्पन्न कीजिए तथा $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$ का BLUE प्राप्त कीजिए । BLUE का प्रसरण भी ज्ञात कीजिए ।

(b) एक निदर्श $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots k, j = 1, \ldots n$ पर विचार कीजिए, ε_{ij}'s हैं i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ । μ तथा α_i के न्यूनतम वर्ग हल प्राप्त कीजिए । α_i's (केवल) का रैखिक प्राचलिक फलन कब आकलनीय होता है ? $H_0 : \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i = 0$ का परीक्षण करने के लिए परीक्षण प्रतिदर्शज व्युत्पन्न कीजिए ।

(c) प्रदर्शित कीजिए कि SRSWOR से क्रमबद्ध प्रतिदर्श अधिक अच्छा होता है यदि $-\frac{1}{n-1} < \rho_w < -\frac{1}{N-1}$ जहाँ n तथा N क्रमश: प्रतिदर्श और समष्टि आमाप हैं तथा ρ_w इकाइयों के उन युग्मों के बीच अंतर्वर्ग सहसंबंध है जो एक ही क्रमबद्ध प्रतिदर्श में हैं ।

(d) संबद्ध ब्लॉक डिज़ाइन से आप क्या समझते हैं ? चार उपचारों तथा पाँच ब्लॉकों वाले एक ब्लॉक डिज़ाइन का आनुषंगिक आव्यूह निम्नलिखित है :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

डिज़ाइन के C-आव्यूह का परिकलन कीजिए ।

(e) X_1 तथा $X_2, X_3, \ldots X_p$ के बीच बहु सहसंबंध गुणांक $\rho_{1.23 \ldots p}$ परिभाषित कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि $1 - \rho^2_{1.2 \ldots p} = (\sigma_{11}\, \sigma^{11})^{-1}$ जहाँ σ_{11} तथा σ^{11} क्रमश: परिक्षेपण मैट्रिक्स Σ तथा Σ^{-1} के (1, 1)वें अवयव हैं ।

(a) Consider the following linear model :

$$y_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \theta_1 + \theta_3 - \theta_2 - \theta_4 + \varepsilon_2$$

$$y_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \varepsilon_3$$

$$y_4 = \theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \theta_3 + \varepsilon_4$$

where θ_1, θ_2, θ_3 and θ_4 are parameters, $\varepsilon_j \sim (0, \sigma^2)$, $j = 1 \ldots 4$. ε_j's are all independently distributed. Derive normal equations and obtain the BLUE of $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$. Also find the variance of the BLUE. *10*

(b) Consider a model $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, \ldots k$, $j = 1, \ldots n$, ε_{ij}'s are i.i.d. $N(0, \sigma^2)$. Obtain least squares solutions of μ and α_i. When is a linear parametric function of α_i's (only) estimable ? Derive a test statistic for testing $H_0 : \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i = 0$. *10*

(c) Show that systematic sample is better than SRSWOR if $-\frac{1}{n-1} < \rho_w < -\frac{1}{N-1}$ where n and N are sample and population sizes respectively and ρ_w is the intraclass correlation between pairs of units that are in the same systematic sample. *10*

(d) What do you understand by a connected block design ? The following is the incidence matrix of a block design with four treatments and five blocks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compute the C-matrix of the design. *10*

(e) Define multiple correlation coefficient $\rho_{1.23 \ldots p}$ between X_1 and $X_2, X_3, \ldots X_p$ and show that $1 - \rho^2_{1.2 \ldots p} = (\sigma_{11}\, \sigma^{11})^{-1}$ where σ_{11} and σ^{11} are $(1, 1)^{th}$ elements of the dispersion matrix Σ and Σ^{-1} respectively. *10*

Q6. (a) मान लीजिए C, प्राचल (v, b, r, k) के साथ एक ब्लॉक डिज़ाइन का C-मैट्रिक्स है तथा $\mathbf{Q}$ समायोजित उपचार योगों का सदिश है । प्रदर्शित कीजिए कि सामान्य योज्य नियत प्रभाव रैखिक निदर्श के अन्तर्गत $E(\mathbf{Q}) = C\tau$ तथा $D(\mathbf{Q}) = C\sigma^2$, जहाँ τ उपचार प्रभावों का सदिश है तथा σ^2 सामान्य प्रायोगिक त्रुटि प्रसरण है । यह भी प्रदर्शित कीजिए कि $l'\tau$ आकलनीय है यदि और केवल यदि l', C की पंक्ति समष्टि में स्थित हो ।

(b) मान लीजिए $X_1 \ldots X_N$ $(N > p)$, एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है $N_p(\mu, \Sigma)$, $\Sigma > 0$ से, जहाँ $\mu = (\mu_1 \ldots \mu_p)'$ तथा Σ अज्ञात हैं । प्रदर्शित कीजिए कि

H_1 : सभी μ_i's समान नहीं हैं के विरुद्ध $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$, का परीक्षण करने के लिए, परीक्षण प्रतिदर्शज को इस तरह व्यक्त कर सकते हैं

$$T = N \left[\overline{X}' \overline{S}' \overline{X} - \frac{(\overline{X}' \overline{S}' \varepsilon)^2}{\varepsilon' \overline{S}' \varepsilon} \right]$$

जहाँ $\overline{X}$ तथा S क्रमश: प्रतिदर्श माध्य सदिश तथा Σ के अनभिनत आकलक हैं और $\varepsilon = (1, 1, \ldots 1)'$. T का अनिराकरणीय बंटन क्या होगा ?

(c) मान लीजिए एक क्षेत्र में 5000 फैक्टरियों के एक समूह के उत्पादन के औसत मान को आकलित करना है और यह आवश्यक है कि प्रतिदर्श आकलन वास्तविक मान के 10% के अन्तर्गत हो, जबकि विश्वास्यता अंतराल 95% हो । समष्टि का विचरण गुणांक 60% ज्ञात है । न्यूनतम प्रतिदर्श आमाप परिकलित करने के लिए समीकरण का निर्धारण कीजिए ।

(a) Let C be the C-matrix of a block design with parameters (v, b, r, k) and let $\mathbf{Q}$ be the vector of adjusted treatment totals. Show that, under the usual additive fixed effects linear model $E(\mathbf{Q}) = C\tau$ and $D(\mathbf{Q}) = C\sigma^2$ where τ is the vector of treatment effects and σ^2 is the common experimental error variance. Also show that $l'\tau$ is estimable if and only if l' lies in the row space of C. *20*

(b) Let $X_1 \ldots X_N$ $(N > p)$ be a random sample from $N_p(\mu, \Sigma)$, $\Sigma > 0$ where $\mu = (\mu_1 \ldots \mu_p)'$ and Σ are unknown. Show that for testing $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p$ against H_1 : not all μ_i's are equal, the test statistic can be expressed as

$$T = N \left[\overline{X}' \overline{S}' \overline{X} - \frac{(\overline{X}' \overline{S}' \varepsilon)^2}{\varepsilon' \overline{S}' \varepsilon} \right]$$

where $\overline{X}$ and S are the sample mean vector and the unbiased estimator of Σ respectively and $\varepsilon = (1, 1, \ldots 1)'$. What would be the non null distribution of T ? *15*

(c) Suppose it is required to estimate the average value of output of a group of 5000 factories in a region so that the sample estimate lies within 10% of the true value with confidence coefficient of 95%. The population coefficient of variation is known to be 60%. Determine the equation to calculate minimum sample size. *15*

Q7. (a) प्रदर्शित कीजिए कि एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए $v = nk$ वाले BIBD के लिए,

$$b \geq v + r - 1.$$

प्रदर्शित कीजिए कि v सम वाले सममित BIBD के लिए, $r - \lambda$ एक पूर्ण वर्ग है ।

(b) एक समान (कॉमन) धनात्मक निश्चित परिक्षेपण आव्यूह (मैट्रिक्स) वाली दो समष्टियों के बीच वर्गित दूरी की महलनोबिस माप परिभाषित कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि यह अभिलक्षणिकों की संख्या का एक अह्रासमान फलन है ।

(c) एक ज़िले में एक ग्रामीण खण्ड (ब्लॉक) को 3 स्तरों में बाँटा गया । निम्नलिखित सारणी विभिन्न स्तरों के लिए गेहूँ की फ़सल के अंतर्गत क्षेत्र के गाँवों की संख्या (N_h) तथा मानक विचलन (S_h) को बताती है :

स्तर संख्या	गाँवों की संख्या (N_h)	मानक विचलन (S_h)
1	15	100
2	10	50
3	25	120

20 गाँवों का एक प्रतिदर्श निकालना है । निम्नलिखित के अंतर्गत प्रत्येक स्तर से कितने गाँव चयनित किए जाने चाहिए :

(i) आनुपातिक नियतन

(ii) नेमेन नियतन

(a) Show that for a BIBD with $v = nk$ for n, a positive integer, $b \geq v + r - 1$.

Show that for a symmetrical BIBD with v even, $r - \lambda$ is a perfect square. *20*

(b) Define Mahalanobis measure of distance squared between two populations with a common positive definite dispersion matrix and show that it is a non decreasing function of the number of characteristics. *15*

(c) A rural block in a district was divided into 3 strata. The following table gives the number of villages (N_h) and standard deviation (S_h) of area under wheat crop for different strata :

Stratum No.	No. of villages (N_h)	Standard deviation (S_h)
1	15	100
2	10	50
3	25	120

A sample of 20 villages is to be drawn. How many villages should be selected from each strata under *15*

(i) proportional allocation ?

(ii) Neyman allocation ?

Q8. (a) मान लीजिए $\mathbf{X}_{2p\times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ बंटित किया जाता है $N_{2p}(\mu, \Sigma)$ के रूप में जहाँ $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2 & \Sigma_1 \end{pmatrix}$, X_1, X_2, μ_1 तथा μ_2 p-सदिश हैं तथा Σ_1, Σ_2 $p \times p$ आव्यूह हैं । $\mathbf{X}$ का अभिलक्षणिक फलन प्राप्त कीजिए । $\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix}$ का बंटन व्युत्पन्न कीजिए ।

(b) मान लीजिए $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ का सहसंबंध आव्यूह R दिया गया है

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

प्रथम दो मुख्य घटकों और उनके द्वारा व्याख्यायित समष्टि विचरण प्राप्त कीजिए ।

(c) अनुपात आकलक परिभाषित कीजिए । प्रदर्शित कीजिए कि यह अभिनत है । एक उपयुक्त प्रतिचयन प्रक्रिया सुझाइए जिसके लिए समष्टि अनुपात का चिरप्रतिष्ठित अनुपात आकलक अनभिनत है । सुझाई गई प्रक्रिया के लिए, अनुपात आकलक के विचरण का अनभिनत आकलक प्रस्तावित कीजिए ।

(a) Let $\mathbf{X}_{2p\times 1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ be distributed as $N_{2p}(\mu, \Sigma)$ where $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2 & \Sigma_1 \end{pmatrix}$, X_1, X_2, μ_1 and μ_2 are p-vectors and Σ_1, Σ_2 are $p \times p$ matrices. Obtain the characteristic function of $\mathbf{X}$. Derive the distribution of $\begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \end{bmatrix}$. *20*

(b) Let $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ has the correlation matrix R given by

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Obtain the first two principal components and the population variance explained by the first two principal components. *15*

(c) Define a ratio estimator. Show that it is biased. Suggest a suitable sampling procedure for which the classical ratio estimator of a population ratio is unbiased. For the suggested procedure, propose an unbiased estimator of the variance of the ratio estimator. *15*